

## СОЛИТОНЫ В ТОПОЛОГИЧЕСКИ ТРИВИАЛЬНОМ И НЕТРИВИАЛЬНЫХ СЕКТОРАХ МОДЕЛИ СКИРМА

В.А.Николаев, О.Г.Ткачев

В рамках нового предположения о форме солитонов модели Скирма обнаружены новые серии решений барионных и мезоноподобных конфигураций. Некоторые из найденных конфигураций являются классически стабильными объектами. Показано, что предложенный анзац обобщает анзац Скирма-Виттена и "к  $\phi$ " анзац. Показано происхождение и приближенный характер последнего.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

### Solitons in Topologically Trivial and Nontrivial Sectors of the Skyrme Model

V.A.Nikolaev, O.G.Tkachev

We have proposed the new form of solitons in the Skyrme model and obtained new series of baryon and meson-like configurations. Some of the obtained configurations are classically stable objects. We have shown that proposed ansatz is the generalization of the Skyrme-Witten ansatz and "k  $\phi$ " one. The origin and approximate character of the last ansatz was demonstrated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Известно, что стационарным решением в секторе с единичным топологическим зарядом является решение Скирма-Виттена или конфигурация типа "еж":

$$U(\vec{r})_{SW} = \cos F(r) + i(\vec{\tau} \cdot \vec{N}) \sin F(r). \quad (1)$$

В выражении (1)  $F(r)$  — киральный угол, описывающий абсолютное значение пионного поля, а  $\vec{N}$  определяет некоторое направление в изотопическом пространстве. Конфигурация "еж" фиксируется вектором  $\vec{N} = \vec{r}/r$ . Функция  $F(r)$  удовлетворяет граничным условиям  $F(0) = N\pi$ ,  $F(\infty) = 0$ . Такие условия обеспечивают конечность энергии солитона с топологическим (барионным) зарядом  $N$ .

$V^{1/}$  показано, что (1) является единственной конфигурацией, которая дает минимум энергии солитонов с  $N = 1$ . Однако для других секторов такая форма не является обязательной. Так, например, в  $^{2,3/}$  были рассмотрены решения, определяемые

$$\vec{N} = (\cos(k\phi) \sin\theta, \sin(k\phi) \sin\theta, \cos\theta), \quad (2)$$

где  $(\theta, \phi)$  суть углы вектора  $\vec{r}$  в сферической системе координат. В уравнении (2)  $k$  — некоторое целое число, которое определяет также и топологический заряд. Некоторые интересные свойства состояний, порождаемых такими решениями, описаны в  $^{2,3/}$ . В секторе с барионным зарядом  $B=2$  эта форма решения дает состояние с массой в области двух нуклонных масс. Процедура квантования порождает богатый спектр ротационных полос.

В данной работе мы предлагаем новую форму решения, задаваемую следующим вектором:

$$\vec{N} = (\cos\Phi(\phi) \sin T(\theta), \sin\Phi(\phi) \sin T(\theta), \cos T(\theta)), \quad (3)$$

где  $\Phi(\phi)$ ,  $T(\theta)$  — некоторые произвольные функции.

Как будет показано, такой анзац обобщает конфигурацию типа "еж" и " $k\phi$ "-конфигурацию из  $^{2/}$ , и в некотором смысле объясняет происхождение и приближенный характер последней. Мы покажем, что анзац (3) приводит к целой совокупности новых серий решений в барионном и мезонном (топологически тривиальном) секторах. Некоторые из найденных нами решений классически стабильны.

Рассмотрим лагранжеву плотность  $\mathcal{L}$  для стационарного решения

$$\mathcal{L} = -\frac{F^2}{16} \text{Tr} L_k L_k + \frac{1}{32e^2} \text{Tr} [L_k, L_1]^2. \quad (4)$$

Здесь  $L_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$  — левые токи. После некоторой утомительной алгебры уравнения (1), (3) и (4) приводят к выражению

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4, \quad (5)$$

где

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{F^2}{8} \left\{ (F')^2 + \left[ \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} \cdot (\Phi')^2 + (T')^2 \right] \frac{\sin^2 F}{r^2} \right\}, \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & -\frac{1}{2e^2} \frac{\sin^2 F}{r^2} \left\{ \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} \cdot (T')^2 \cdot (\Phi')^2 \cdot \frac{\sin^2 F}{r^2} + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} \cdot (\Phi')^2 + (T')^2 \right] \cdot (F')^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

В уравнениях (6)-(7) мы используем символ "штрих" для обозначения следующих производных:

$$\Phi' = \frac{d\Phi}{d\phi}; \quad T' = \frac{dT}{d\theta}; \quad F' = \frac{dF}{dr}.$$

Вариация лагранжиана (5) по  $\Phi(\phi)$  дает

$$\Phi'' = 0, \quad (8)$$

т.е.

$$\Phi(\phi) = k\phi + \text{Const.}$$

Мы рассматриваем только решения с нулевым значением постоянной. Число  $k$  должно быть целым, чтобы получить однозначное во всем  $r$ -пространстве решение.

Теперь для массы солитона имеем выражение

$$M = M_2 + M_4, \quad (9)$$

$$M_2 = \frac{\gamma}{4} \int_0^\infty dx x^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left\{ (F')^2 + \left[ \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} k^2 + (T')^2 \right] \frac{\sin^2 F}{x^2} \right\}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} M_4 = & \gamma \int_0^\infty dx x^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left\{ \left[ \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} k^2 + (T')^2 \right] \cdot (F')^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\sin^2 F}{x^2} \cdot \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} \cdot k^2 \cdot (T')^2 \right\} \frac{\sin^2 F}{x^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\gamma = \pi \cdot F_\pi / e$  и  $x = F_\pi \cdot r$ .

Чтобы минимизировать функционал  $M$ , функции  $T(\theta)$  и  $F(x)$  должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{\delta M}{\delta T} = 0; \quad \frac{\delta M}{\delta F} = 0, \quad (12)$$

или, более конкретно,

$$[x^2 + 2a \sin^2 F] F'' + 2xF' + a(F')^2 \sin(2F) - \frac{a}{4} \sin(2F) - \\ - 2b \frac{\sin^2 F}{x^2} \sin(2F) = 0, \quad (13)$$

$$2[A + k^2 B \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta}] T'' + k^2 B \frac{\sin(2T)}{\sin^2 \theta} (T')^2 + \\ + 2T' \operatorname{ctg} \theta [A - k^2 B \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta}] - k^2 A \frac{\sin(2T)}{\sin^2 \theta} = 0. \quad (14)$$

Коэффициенты  $a, b$  и  $A, B$  в выражениях (13)-(14) суть следующие интегралы:

$$a = \int_0^{\pi} [k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} + (T')^2] \sin \theta d\theta, \quad (15)$$

$$b = \int_0^{\pi} k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} (T')^2 \sin \theta d\theta, \quad (16)$$

$$A = \int_0^{\infty} \sin^2 F [\frac{1}{4} + (F')^2] dx, \quad (17)$$

$$B = \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 F}{x^2} dx. \quad (18)$$

Исследуя уравнения (9)-(11) и (15)-(18), заключаем, что функция  $T(\theta)$  должна быть кратна  $\pi$  в точках  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Мы рассматриваем только конфигурации с конечной массой, — вот почему  $F(0) = N\pi$  с целым  $N$ . Без потери общности выбираем  $F(\infty) = 0$ . Нетрудно проверить, что асимптотическое поведение  $F$  представляется формулой

$$F(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{x^{p+1}}, \quad p = \frac{\sqrt{1+2a} - 1}{2}. \quad (19)$$

В окрестности начала координат

$$F(x) \sim \pi \cdot N - a \cdot x^p, \quad (20)$$

$x \rightarrow 0$

где

$$p = \frac{\sqrt{1+2a} - 1}{2}, \text{ если } a \geq 4$$

и

$$p = \frac{1 + \sqrt{1+16b/a}}{4} \text{ для } a \geq 2b.$$

$a$  — некоторый численный фактор.

Ясно, что  $T(\theta)$  имеет следующее поведение в окрестностях границ своей области определения:

$$T(\theta) \rightarrow \theta^k \quad (21)$$

$\theta \rightarrow 0$

и

$$T(\theta) \sim \pi \cdot \ell - (\pi - \theta)^k. \quad (22)$$

$\theta \rightarrow \pi$

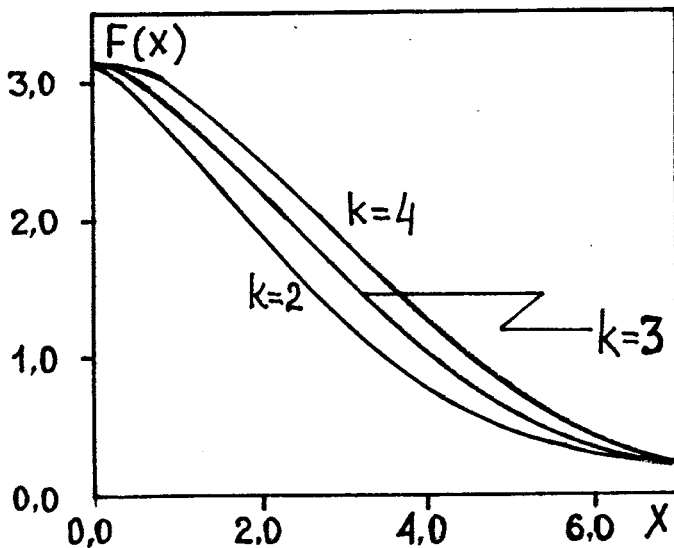


Рис. 1. Решение  $F(x)$  уравнения (13) для  $\ell=1$  и  $k=2, 3, 4$ .

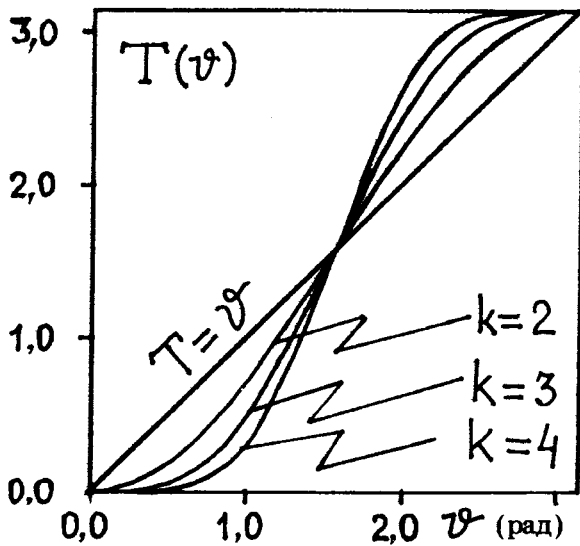


Рис.2. Решение  $T(\theta)$  уравнения (14) для  $\ell = 1$  и  $k=2, 3, 4$ .

Здесь  $\ell$  — некоторое целое число. Некоторые решения уравнений (13) - (14) графически представлены на рис.1 и рис.2.

Теперь рассмотрим более внимательно структуру солитонов. С этой целью рассчитаем плотность барионного заряда

$$J_0^B(\vec{r}) = - \frac{1}{24\pi^2} \epsilon_{\nu\rho\sigma} \text{Tr}(L_\nu L_\rho L_\sigma). \quad (23)$$

Прямой расчет дает

$$J_0^B(r) = \frac{1}{2\pi^2 r^2} \sin^2 F(F') \frac{\sin T}{\sin \theta} \frac{dT}{d\theta} \frac{d\Phi}{d\phi}. \quad (24)$$

Здесь мы использовали определения (1) и (3). Выражение для плотности топологического заряда, даваемое уравнением (24), представляет собой обобщение выражения для "kφ"-анзаца из [2].

Из (24) непосредственно следует выражение для соответствующего топологического заряда:

$$\begin{aligned}
 B &= - \frac{1}{4\pi^2} \left[ F(x) - \frac{\sin(2F)}{2} \right] \Big|_{F(0)}^{F(\infty)} \cdot \left[ \cos(T(\theta)) \right] \Big|_{T(0)}^{T(\pi)} \cdot \Phi \Big|_{\Phi(0)}^{\Phi(\pi)} = \\
 &= \frac{kN}{2} [1 - \cos(\pi\ell)].
 \end{aligned} \quad (25)$$

Видно, что для четных  $\ell$  мы имеем дело с мезоноподобными солитонами. На рис.3 схематически представлено распределение

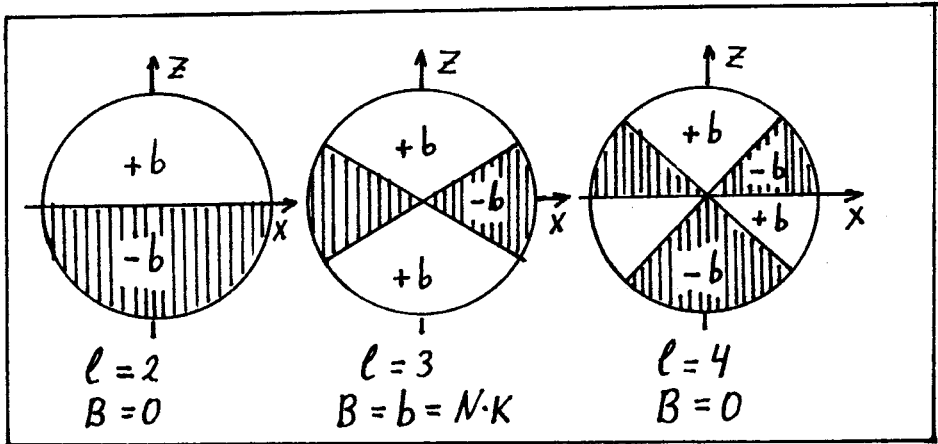


Рис.3. Распределение барионного заряда (дано схематично) в  $(X, Z)$ -плоскости для некоторых значений  $N, k, \ell$ .

Таблица 1. Классические массы солитонов для обобщенного анзаца

$k/\ell$	1	2	3	4	$T(\theta) = \theta$
1	11,605	26,358	46,332	71,169	11,605
2	22,458	45,536	73,533	106,609	24,829
3	34,585	66,701	103,081	144,321	44,369
4	47,675	89,310	134,450		70,176
5	61,569	113,119			102,206

барионного заряда в  $(X, Z)$ -плоскости для солитонов, характеризуемых числами  $k, N$  ( $F(0) = \pi \cdot N, F(\infty) = 0$ ) и граничными условиями  $T(0) = 0, T(\pi) = \pi \ell, (\ell = 1, 2, 3, \dots)$ .

Рассчитанные массы солитонов для  $N=1$  и некоторых значений  $k, \ell$  представлены в таблице в единицах  $(\pi F \pi / e)$ . В последней колонке представлены результаты с "к $\phi$ "-анзацем для сравнения с первой колонкой.

Таким образом, спектр солитонов "к $\phi$ " барионных конфигураций модели Скирмы расширен до  $N \cdot k$ -барионных конфигураций для нечетных  $\ell$ . Более того, мы обнаружили спектр тяжелых мезоноподобных ( $N \cdot k/2$ -барион —  $N \cdot k/2$ -антибарион) конфигураций при четных  $\ell$ . Некоторые из полученных конфигураций являются классически стабильными, т.е. их масса меньше суммы масс составляющих их барионов (солитонов). Классические "энергии связи" таких состояний легко оценить по табл.1.

Как нетрудно видеть, в последней колонке табл.1 числа для  $k \geq 2$  существенно больше стоящих в 1-й колонке. Поскольку расчет массы носит вариационный характер, отсюда можно сделать заключение о том, что выбранная нами пробная полевая конфигурация лучше, чем "k  $\phi$ "-конфигурация в вариационном смысле.

Следует отметить, что числа, представленные в табл.1, соответствуют расчетам в кирально-симметричном пределе (масса пиона  $m_\pi = 0$ ). Вариационный расчет с явно нарушающим киральную симметрию членом лагранжиана

$$\mathcal{L}_\pi = - \frac{F_\pi^2 m_\pi^2}{8} \text{Tr} (1 - U) \quad (26)$$

позволяет сравнить наш вариационный расчет для некоторых состояний с численным расчетом, проведенным в <sup>4/</sup>. С этой целью мы выбрали константы  $F_\pi = 108$  МэВ и  $e = 4,84$ , использованные в <sup>4/</sup>. Классическая масса "k  $\phi$ "-дибариона равна 1833 МэВ; анзац, использованный нами, дает 1670 МэВ, а расчет из <sup>4/</sup> — 1660 МэВ. Наши и расчеты <sup>4/</sup> для более тяжелых мультибарионов, которые здесь следовало бы назвать мультискирмионами, поскольку речь идет о классическом пределе, находятся в следующем соответствии: 3-барион — 2580 МэВ и 2530 МэВ; 4-барион — 3572 МэВ и 3452 МэВ, 5-барион — 4635 МэВ и 4420 МэВ. Некоторое расхождение в оценке масс тяжелых мультискирмионов дает возможность оценить погрешность нашей пробной конфигурации, которая оказывается меньше 5% для рассматриваемых случаев.

Более подробный анализ найденных решений в кирально-симметричном случае приведен в табл.2. В этой таблице мы приводим схематическую структуру решения, барионный заряд, а также более детально характеризующие распределение барионного заряда величины квадратов среднеквадратичных радиусов  $\langle r_x^2 \rangle$ ,  $\langle r_y^2 \rangle$ ,  $\langle r_z^2 \rangle$  в единицах  $(F_\pi e)^{-2}$  для некоторых решений, массы которых включены в табл.1.

Указывая структуру  $2S\bar{2}\bar{S}$  для  $k = 2$   $\ell = 2$ -решения, мы имеем в виду, что распределение барионного заряда в пространстве разбивается на четыре аксиально-симметричные области. В двух из этих областей сконцентрировано по единице барионного заряда, а в двух других — по единице отрицательного заряда. Указывая, что данное состояние стабильно, мы имеем в виду только то, что масса данного классического состояния меньше суммы масс скирмионов и антискирмионов. Обращает на себя внимание тот факт, что приведенные в табл.2 состояния сильно отличаются по форме, о чем можно судить по среднеквадратичным радиусам.



Таблица 2. Структура состояния ( $N = 1, k, \ell$ ) и квадраты средне-кватдратичных радиусов распределения барионного заряда

	1	2	3
1	$B = 1, \text{стаб.} S$ $r_x^2 = r_y^2 = r_z^2$ $= 5,72$	$B = 0, \text{нестаб.} S\bar{S}$ $r_x^2 = r_y^2 = 0$ $r_z^2 = 0$	$B = 1, \text{нестаб.} S\bar{S}\bar{S}$ $r_x^2 = r_y^2 = -4,1$ $r_z^2 = 22,8.$
2	$B = 2, \text{стаб.} 2S$ $r_x^2 = r_y^2 = 6,5$ $r_z^2 = 2,9$	$B = 0, \text{стаб.} 2S\bar{S}$ $r_x^2 = r_y^2 = 0$ $r_z^2 = 0$	$B = 2, \text{нестаб.} 2S\bar{S}\bar{S}$ $r_x^2 = r_y^2 = -8,7$ $r_z^2 = 62.$
3	$B = 3, \text{стаб.} 3S$ $r_x^2 = r_y^2 = 16,2$ $r_z^2 = 4,2$	$B = 0, \text{стаб.} 3S\bar{S}\bar{S}$ $r_x^2 = r_y^2 = 0$ $r_z^2 = 0$	$B = 3, \text{стаб.} 3S\bar{S}\bar{S}\bar{S}$ $r_x^2 = r_y^2 = -9,9$ $r_z^2 = 114,3.$

В заключение нам хотелось бы отметить, что найденные серии решений с топологическим зарядом, равным нулю, напоминают аналогичные "тяжелые" решения<sup>/5/</sup> в двумерных моделях типа модели Синус-Гордон.

### Л и т е р а т у р а

1. Rybakov Y.P., Sanyuk V.I. — Preprint NBI-HE-81-49.
2. Weigel H., Schwesinger B., Holzwart G. — Phys. Lett., 1986, B168, p.321.
3. Николаев В.А., Ткачев О.Г. — Сообщение ОИЯИ Р4-86-515, Дубна, 1986; Николаев В.А. — В сб. "Труды VIII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий", ОИЯИ, Д1,2-86-668, т. 1, с.78.
4. Копелиович В.Б., Штерн Б.Е. — Письма в ЖЭТФ, 1987, т.45, вып.4, с.165; Зенкин С.В., Копелиович В.Б., Штерн Б.Е. — В сб.: "Труды симпозиума по нуклон-нуклонным и адрон-ядерным взаимодействиям", Л.: изд. ЛИЯФ АН СССР, 1986, с.415.
5. Фаддеев Л.Д. — Письма в ЖЭТФ, 1975, т.21, вып.2, с.141.

Рукопись поступила 24 января 1989 года.